

# Analyse de la décision dans l'Incertain

(4)

2009

Bernard ESPINASSE

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

## Plan

- Introduction
- Critères de décision face à l'incertain (Wald, Savage, Hurwicz,...)
- Les incertitudes et leur évaluation (prob. objectives et subjectives)

## Références

### Ouvrages :

- H. Raïffa, « Analyse de la décision : introduction aux choix en avenir incertain », Dunod, 1973. Traduction de « Decision analysis : introductory lectures on choices under uncertainty », Addison-Wesley, 1970.
- F. Carlier, A. Richard, « Analyse stratégique de la décision », PUG, 2002.
- R. Kast, « La théorie de la décision », La découverte, 1993.
- 

### Cours :

- D. Bouyssou, Lamsade CNRS, Paris.
- J.Y. Jaffray, P. Perny, C. Gonzales, LIP6 CNRS, Université Paris VI.
- P. Leray, INSA Rouen.

## Plan

### 1. Introduction

### 2. Critères de décision face à l'incertain

- Critère de MaxiMax
- Critère de Wald
- Critère de Savage
- Critère de Laplace
- Critère de Hurwicz
- Critère de Bernouilli
- Comparaison des critères

### 3. Les incertitudes et leur évaluation

- Typologie de l'incertitude
- Probabilités objectives
- Probabilités subjectives
- Evaluation de l'incertitude

# 1 - Introduction

## Introduction

En présence d'**incertitude non mesurable**, le décideur ne peut plus pondérer l'importance respective de chaque état par une probabilité, car il ne la connaît pas

**Aussi, plusieurs critères pour la décision individuelle ont été proposés :**

- Critères de **Laplace, Bernouilli, Wald, Hurwicz, Savage, ...**
- Nous ferons une **comparaison de ces critères**
- La dernière partie sera consacrée aux **typologies de l'incertitude**, aux **probabilités objectives** et **probabilités subjectives**, et à l'**évaluation de l'incertitude**

## Enoncé d'un cas : immobilier

On s'intéresse à un **investissement immobilier** :

Faut-il investir dans :

- **Une résidence**
- **Un immeuble**
- **Un appartement**
- **Aucun des trois**

• Cela va dépendre de l'état du marché immobilier :

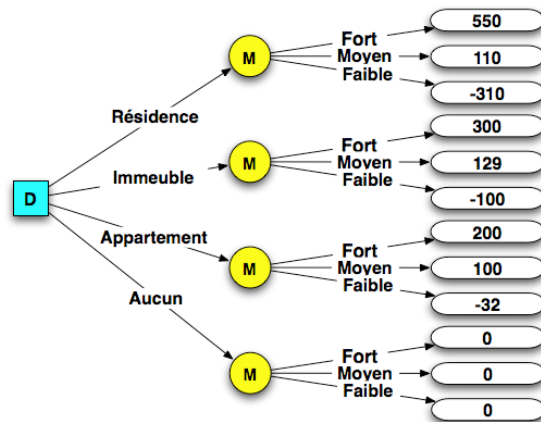
- **Fort / Moyen / Faible**

L'estimation des profits de chacun de ces investissements selon l'état du marché est :

<i>Décision d'invest.</i>	<i>Marché Fort</i>	<i>Marché Moyen</i>	<i>Marché Faible</i>
<b>Résidence</b>	550	110	-310
<b>Immeuble</b>	300	129	-100
<b>Appartement</b>	200	100	-32
<b>Aucun</b>	0	0	0

## Enoncé d'un cas : arbre de décision

Arbre de décision associé :



## 2 – Critères de décision face à l'incertain

- Critère de MaxiMax
- Critère de Wald
- Critère de Savage
- Critère de Laplace
- Critère de Hurwicz
- Critère de Bernouilli
- Comparaison des critères

## Critère de MaxiMax

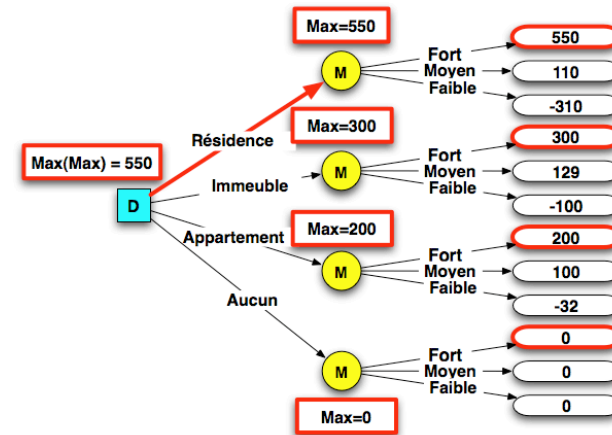
- C'est le critère du **décideur optimiste**
- on « redescend » l'**utilité maximale** de chaque « valeur »
- **Règle** : on choisit la **décision** qui à la **plus grande utilité maximale**

## Critère de Wald ou « MaxiMin » (W)

- C'est le critère du **décideur pessimiste** : décider comme si la nature était animée des pires intentions ...
- on « redescend » l'**utilité minimale** de chaque « valeur »
- **Règle** : on choisit la **décision** qui à la **plus grande utilité minimale** (la "moins pire")

## Critère de MaxiMax

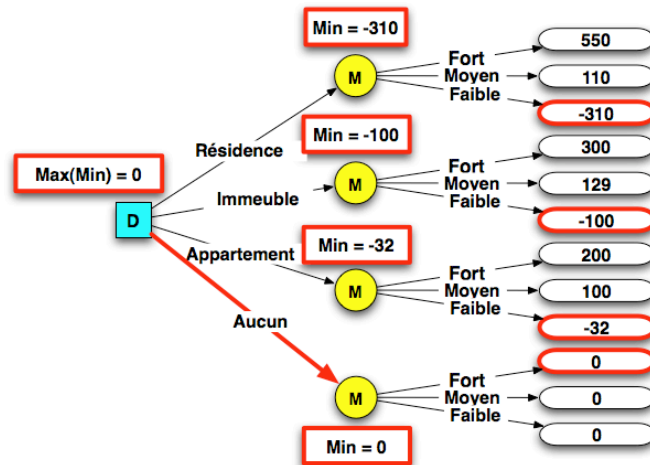
Arbre de décision associé :



Choix MaxiMax (M) : **Résidence : 1** ; Immeuble : 2 ; Appartement : 3 ; Aucun : 4

## Critère de Wald ou « MaxiMin » (W)

Arbre de décision associé :



Choix Wald (W) : Résidence : 4 ; Immeuble : 3 ; Appartement : 2 ; **Aucun : 1**

## Critère de Savage ou « Regret MiniMax » (S)

« **Regrettons le moins possible dans le pire des cas ...** »

Calcul d'une matrice des **regrets** (ou manque à gagner) à partir de la table des résultats ainsi :

$$b_{i,j} = \max_k a_{kj} - a_{ij}, \forall i \text{ et } j$$

- on « redescend » le **regret maximale** de chaque « valeur » (pire des cas)
- **Règle** : on choisit la **décision** qui donne le **plus petit regret maximal**

Matrice des résultats :

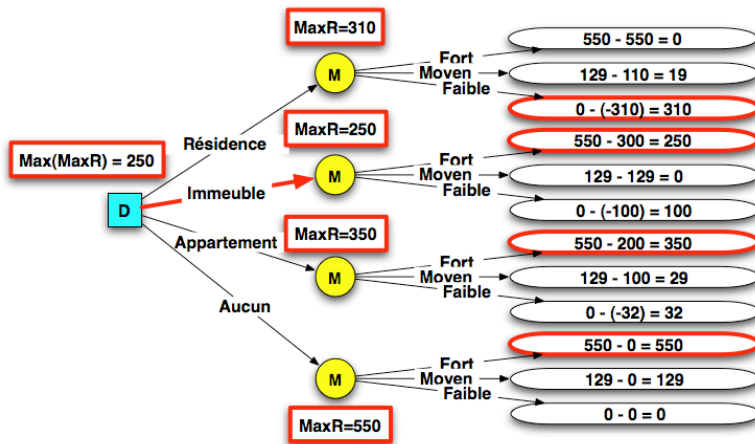
Marché	Marché Fort	Marché Moyen	Marché Faible
<b>Décision d'invest.</b>			
Résidence	550	110	-310
Immeuble	300	129	-100
Appartement	200	100	-32
Aucun	0	0	0

Matrice des regrets :

Marché	Marché Fort	Marché Moyen	Marché Faible
<b>Décision d'invest.</b>			
Résidence	550-550= 0	129-110= 19	0-(-310)= 310
Immeuble	550-300= 250	129-129= 0	0-(-100)= 100
Appartement	550-200= 350	129-100= 29	0-(-32)= 32
Aucun	550-0= 550	129-0= 129	0-0= 0

## Critère Savage ou « Regret MiniMax » (S)

Arbre de décision associé :



Choix Savage (S) : Résidence : 2; Immeuble : 1; Appartement : 3; Aucun : 4

## Critère de Laplace

Le critère de Laplace est fondé sur l'hypothèse d'équiprobabilité des  $n$  événements (états) possibles de la nature soit  $1/n$  pour chaque état.

Le critère de Laplace (L) se calcule ainsi :

$$L(d_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ij}, \forall i$$

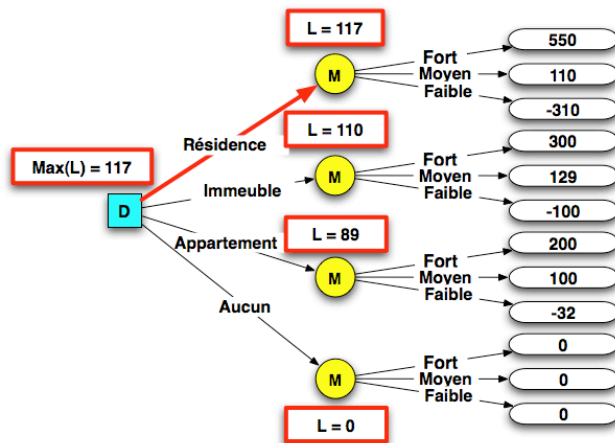
- on calcule pour chaque décision le critère L (la moyenne des valeurs)
- Règle : on choisit la décision qui donne la plus grande valeur de L

Exemple :

Marché Décision d'invest.	Marché Fort	Marché Moyen	Marché Faible	L
Résidence	550	110	-310	117
Immeuble	300	129	-100	110
Appartement	200	100	-32	89
Aucun	0	0	0	0

## Critère de Laplace

Arbre de décision associé :



Choix Laplace (L) : Résidence : 1; Immeuble : 2; Appartement : 3; Aucun : 4

## Critère d'Hurwicz

Le critère d'Hurwicz définit un degré de pessimisme ( $\alpha$ ) et un degré d'optimisme ( $1 - \alpha$ )

Il prend à la fois le meilleur et le pire résultat de chaque stratégie et les pondère dans une combinaison linéaire par cet index ( $\alpha$  et  $1 - \alpha$ )

$$H(d_i) = \alpha \text{Min } a_{ij} + (1 - \alpha) \text{Max } a_{ij}, \forall i$$

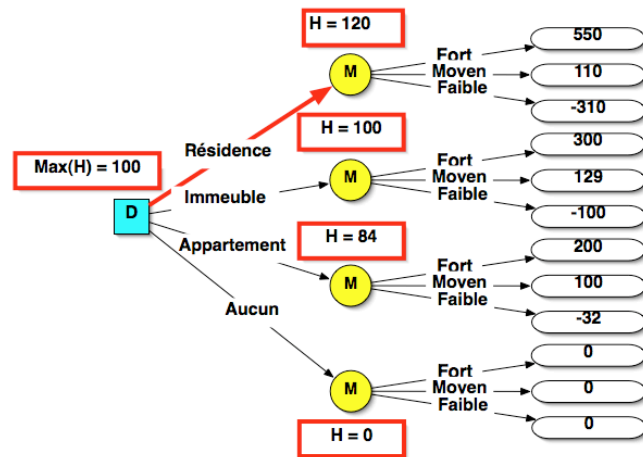
- on calcule pour chaque décision le critère H
- Règle : on choisit la décision qui donne la plus grande valeur de L

Exemple : avec  $\alpha = 0,5$  on a :

Marché Décision d'invest.	Marché Fort	Marché Moyen	Marché Faible	H
Résidence	550	110	-310	120
Immeuble	300	129	-100	100
Appartement	200	100	-32	84
Aucun	0	0	0	0

## Critère d'Hurwicz (H)

Arbre de décision associé :



Choix Hurwicz (H) : Résidence : 3; Immeuble : 1; Appartement : 2; Aucun : 4

## Critère de Bernouilli (B)

Le critère de Bernouilli, comme le critère L, est aussi basé sur l'hypothèse d'équiprobabilité des  $n$  états de la nature, mais il utilise l'utilité des gains définie par leur logarithme :

$$B(d_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Log } a_{ij}, \forall i$$

- on calcule pour chaque décision le critère B
- Règle : on choisit la décision qui donne la plus grande valeur de B

Exemple :

Matrice des résultats

Décision d'invest.	Marché Fort	Marché Moyen	Marché Faible
Résidence	550	110	-310
Immeuble	300	129	-100
Appartement	200	100	-32
Aucun	0	0	0

Calcul de B :

Décision d'invest.	Marché Fort	Marché Moyen	Marché Faible	B
Résidence	6,31	4,70	-5,74	5,27
Immeuble	5,70	4,86	-4,61	5,95
Appartement	5,3	4,61	-3,47	6,44
Aucun	-	-	-	-

Choix Bernouilli (B) : Résidence : 3; Immeuble : 2; Appartement : 1; Aucun : 4

## Comparaison des critères pour traiter l'incertitude

un des moyen utilisés pour la **décision optimale** est de construire un tableau classant les décisions pour chacun des critères avec leur rang respectifs, exemple :

Marché	MaxiMax	Wald	Savage	Laplace	Hurwicz	Bernouilli	Somme des rangs
Décision d'inves	M	W	S	L	H	B	
Résidence	1	4	2	1	3	3	14
Immeuble	2	3	1	2	1	2	11
Appartement	3	2	3	3	2	1	14
Aucun	4	1	4	4	4	4	21

⇒ De par la somme des rang, on en déduit le classement :

1. l'investissement « immeuble »
2. l'investissement « résidence » ou l'investissement « immeuble »
3. enfin « aucun » investissement

**Conclusion :**

- Difficulté de choisir un critère
- En fait, dans la réalité, il est rare qu'on n'ait absolument aucune information sur les probabilités des états de la nature, aussi **il vaut mieux se contenter d'évaluation imparfaites des tels probabilités plutôt que de considérer un environnement totalement incertain**

## 3 – Les incertitudes et leur évaluation

- Probabilités objectives
- Probabilités subjectives

## Introduction

### Difficulté de choisir un critère pour décider dans l'incertain

- En fait, dans la réalité, il est **rare qu'on n'ait absolument aucune information** sur les probabilités des états de la nature
- il vaut mieux **se contenter d'évaluation imparfaites des tels probabilités** plutôt que de considérer un environnement totalement incertain
- aussi les **individus** sont souvent **capables d'établir**, avec degrés divers d'assurance, **des anticipations sur des classes de vraisemblance** sur la **probabilité** des états
- on peut définir une **typologie de l'incertitude selon des classes de vraisemblance** sur la probabilité des états
- diverses méthodes tentent de donner **une représentation numérique de l'incertitude** conduisant à une typologie de l'incertitude :
  - **les probabilités objectives**
  - **les probabilités subjectives**

## Probabilités objectives

### Les **probabilités objectives** d'un événement ne sont pas liées aux décideurs

- des **éléments de symétrie** (cas d'une pièce de monnaie, tirage aveugle dans une urne, ...)
- justifient la détermination de la **probabilité d'un tirage** comme le rapport :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

*Exemple : le tirage d'un 6 pour un dés à 6 faces parfaitement symétriques est de 1/6)*

- les **théorèmes sur les probabilités** permettent de déterminer les probabilités d'événement plus complexes (analyse combinatoire) :  
*Exemple : la probabilité de tirer deux 6 de suite est de  $1/6 \times 1/6 = 1/36$ )*
- les **méthodes d'échantillonnage**, les **sondages d'opinions**, les **tests statistiques**, sont des moyens puissants pour déterminer la probabilité d'événements (contrôle de qualité, élection, ...)

## Probabilités subjectives

### Les **probabilités subjectives** d'un décideur relatives à un événement expriment ses **croiances** vis-à-vis de l'occurrences de cet événement

- ces **croiances** peuvent résulter :
  - soit **d'un sentiment personnel** qu'il exprime directement (le dollar devrait baisser contre l'euro)
  - soit **d'une analyse** : décomposition des enchaînements conduisant à tel événement, estimation des **probabilités conditionnelles**, ...
- la valeur que l'on attribue à ces croyances dépend bien sûr de **la qualification du décideur dans ce domaine**, de son **degré d'expertise** (souvent un seul expert ne suffit pas)
- pour conclure, les difficultés liées au traitement des décisions dans l'incertain poussent à l'utilisation de **probabilités subjectives** avec :
  - une **réflexion critique sur la qualité de l'évaluation**, et
  - une **analyse de sensibilité** permettant de mesurer leur influence sur la valeur du critère de décision