SY05 : Outils d'aide à la décision
décision stratégique et théorie des jeux

Paul HONEINE et Nacima LABADI
H201 — G212

en collaboration avec
Roberto Wolfler Calvo (Université Paris 13)

Université de technologie de Troyes

Printemps 2013

Programme et calendrier du cours

	mars-avril	mai-juin
CM	Paul HONEINE	Nacima LABADI
TD	Elias KHOURY	Elias KHOURY
	médian (40%)	final (60%)

Programme

- Univers en incertitude complète
- Univers aléatoire
- Valeur de l'information
- Arbre de décision
- Fonction utilité
- Théorie des jeux

  (pure, mixte, à somme nulle, coopératifs, répétitifs)
- Multi-critères / Multi-objectifs
- Excel

Théorie des jeux

Exemple (Cafet vs RU)

La fonction objectif est le profit, à maximiser

$$\textit{profit}_i = p_i n_i - c_i n_i$$

- n_i = *nombre d'étudiants*
- p_i = *prix des différents produits vendus*
- c_i = *coût des différents produits vendus*

Remarque : $n_{cafet} = \textit{fct}(p_{cafet}, p_{RU})$

Deux objectifs différents :
chacun veut maximiser son profit, mais influence mutuelle des décisions

Multi-critères

Problème d'optimisation mono-critère

$$\min f(x)$$
$$x \in \mathcal{X}$$

Problème d'optimisation multi-critères

minimiser le coût : $\min \sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j}$

avec $c_{i,j}$ les coûts et $x_{i,j}$ les variables de décision (différents choix)

mais aussi **optimiser le service**

Exemples :

- choisir une voiture
- acheter une maison
- ...

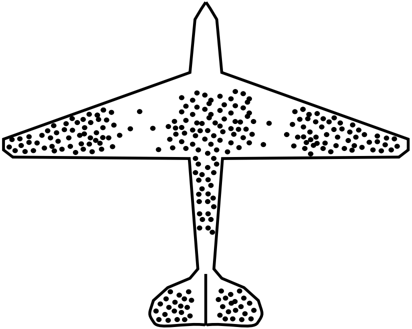
Outils d'aide à la décision

Décision en univers incertain

- Univers en incertitude complète
- Univers aléatoire : approche Bayésienne
- Valeur de l'information
- Arbre de décision
- Fonction utilité

Outils d'aide à la décision

Répartition des trous de balles sur les avions survivants



Durant la deuxième guerre mondiale, le mathématicien Abraham Wald $(1902 - 1950)$ cherche à augmenter la vie des avions de guerre. Il faut alors déterminer où, sur la coque de chaque avion, il faut augmenter l'armature, sachant qu'il n'est pas possible de le faire partout pour une question de poids. Pour répondre à cette problématique, il dispose de l'ensemble des avions qui reviennent du combat, et plus particulièrement de la répartition des trous de balles (voir figure). Aucune information n'est disponible sur les avions non-survivants. Que propose t-il ?

Décision en univers (complètement) incertain

Exemple (introductif)

matrice des gains (ou utilité)

situations

actions		s_1	s_2	s_3	s_4
	a_1	5	10	13	35
	a_2	8	7	3	23
	a_3	21	18	7	21
	a_4	30	22	14	25

- Solution pessimiste
- Solution optimiste
- Solution prudente
- Solution dominante
- Solution cas equiprobable
- ...

Critères de choix

situations

actions	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	13	35
a_2	8	7	3	23
a_3	21	18	7	21
a_4	30	22	14	25

Critères de choix : optimiste-pessimiste

- Solution optimiste

$$\max_i \max_j u(a_i, s_j)$$

- Solution pessimiste / maximin / critère de Wald

$$\max_i \min_j u(a_i, s_j)$$

- Famille de solutions par le critère de Hurwitz (coefficient d'optimisme α)

$$\max_i \left(\alpha \max_j u(a_i, s_j) + (1-\alpha) \min_j u(a_i, s_j)\right)$$

Critères de choix

situations

actions		s_1	s_2	s_3	s_4
	a_1	5	10	13	35
	a_2	8	7	3	23
	a_3	21	18	7	21
	a_4	30	22	14	25

Critères de choix

- Solution prudente / minimax regret / critère de Savage
  Matrice de regret = différence entre le max par colonne, $\bar{u}_j$, et les autres valeurs

$$\min_i \max_j \left(\bar{u}_j - u(a_i, s_j)\right)$$

- Solution dominante

$$\begin{array}{ll} \text{si} & u(a_i, s_j) \geq u(a_k, s_j) \quad \forall j, \\ \text{alors} & a_i \text{ domine } a_k \end{array}$$

Critères de choix (suite)

Autres solutions (suite)

- Solution (obtenue à partir de la matrice des pertes)

$$\max_i \min_j$$

- Solution : cas sous-optimal

$$\max_i \min_j + \min_i \max_j$$

Probabilité de survenance de chaque situation ...

- Solution – situations equiprobables / critère de Laplace

$$\max_i \sum_j u(a_i, s_j)$$

Information supplémentaire : probabilité d'occurence

Exemple

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_j
	0.1	0.3	0.2	0.4	p_j
a_1	*5*	*10*	*18*	*25*	
a_2	*8*	*7*	*8*	*23*	
a_3	*21*	*18*	*12*	*21*	
a_4	*30*	*22*	*19*	*15*	

Solution : maximiser l'utilité espérée

$$\max_i \sum_j p_j u(a_i, s_j)$$

Critères de comparaison les plus utilisés

- Espérance mathématique : $\mathrm{E}(z)$ (max. l'utilité espérée ou min. le coût espéré)
- Espérance mathématique + variance : $\mathrm{E}(z) + \rho \operatorname{var}(z)$
- Valeur admissible (on fixe des limites)
- Situation la plus probable

Critère espérance mathématique

Critère espérance mathématique (max. l'utilité espérée, min. le coût espéré)

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables de décision et $c_1, c_2, \ldots c_n$ des constantes inconnues a priori (que l'on représente par des variables aléatoires C_i).

z étant une variable aléatoire, on minimise son espérance mathématique :

$$\min \mathrm{E}(z)$$

avec $\mathrm{E}(z) = \int (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n)\, dF_1(c_1)\, dF_2(c_2)\ \ldots\ dF_n(c_n)$ et $F_i(c_i) = Pr(C_i \leq c_i)$ étant la fonction de répartition de la variable aléatoire C_i

Limites : L'espérance mathématique n'a pas de sens que si le même problème est répété un grand nombre de fois, *sans variations*.

Critère espérance mathématique + variance

Exemple :
Investissement : $1\,000$ €

Option 1 Revenu : $2\,000$ € avec une probabilité 1

Option 2 Revenu : 0 € avec une probabilité 0.5, et $4\,100$ € avec une probabilité 0.5

Avec une espérance mathématique de $1\,000$ € pour la première, et $1\,050$ € pour la seconde, la réponse diffère selon la personne concernée soit prudente ou pas.

Critère espérance mathématique + variance

$$\min \mathrm{E}(z) + \rho\,\mathrm{var}(z)$$

où ρ est une constante, positive (si $\min$) ou négative (si $\max$).

Sa valeur absolue est d'autant plus grande que la prudence est importante.

Exemple : Maintenance d'un parc de machines

Politique de maintenance : Une maintenance préventive est effectuée toutes les T périodes (à décider) sur toutes les n machines. Si une machine tombe en panne entre deux maintenances préventives, elle est immédiatement réparée de manière corrective.

Connus :

- p_t : Probabilité qu'une machine tombe en panne t périodes après une maintenance (préventive ou curative)
- c_1 : Coût d'une réparation corrective (y compris le coût de panne)
- c_2 : Coût d'une maintenance préventive sur une machine

Objectif : Minimiser le coût de fonctionnement du système par période,

1. par la méthode de l'espérance mathématique,
2. par la méthode de l'espérance mathématique + variance.

Application numérique : $n = 50, c_1 = 100, c_2 = 10$

t	1	2	3	4	5	...
p_t	0.05	0.07	0.1	0.13	0.18	...

Astuce : Soit n_t le nombre de machines tombées en panne à la $t^{\text{ème}}$ période après une maintenance préventive. On suppose que la variable aléatoire n_t suit une loi binomiale de paramètres (n, p_t).

Critère valeur admissible

Critère valeur admissible

Ce critère est utile quand il est très difficile de quantifier la conséquence d'une décision.

Exemple : Demande des clients et approvisionnement
On suppose que la demande des clients suit une variable aléatoire X de densité de probabilité $f(x)$. Il faut décider de la quantité à approvisionner, y.

$$\mathrm{E(rupture)} = \int_y^{+\infty} (x-y)\, f(x)\, dx \leq B_1 \qquad \mathrm{E(stockage)} = \int_0^y (x-y)\, f(x)\, dx \leq B_2$$

Application numérique : $B_1 = 2$ et $B_2 = 4$, avec

$$f(x) = \begin{cases} 20/x^2 & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Critère situation la plus probable

Critère situation la plus probable

Le problème est transformé à un problème déterministe où chaque variable aléatoire est remplacée par la valeur la plus probable (ou valeur moyenne pour la loi normale).

Exemple : Prendre l'avion
Quand on part en voyage, on a le choix entre prendre l'avion ou ne pas le prendre. Chaque vol a une probabilité non nulle de crash. Sachant que la vie a un coût infini, la meilleure solution consiste à ne pas prendre l'avion si on utilise le critère *espérance mathématique* ou le critère *espérance mathématique et variance*. La plupart de voyageurs supposent que l'avion ne tombera pas du ciel, ce qui est la situation la plus probable. Ils utilisent implicitement cette approche.

Théorie de la décision

Rappel

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_j
	0.1	0.3	0.2	0.4	p_j
a_1	5	10	18	25	
a_2	8	7	8	23	
a_3	21	18	12	21	
a_4	30	22	19	15	

La suite :

- Univers en incertitude complète
- Univers aléatoire : approche Bayésienne
- Valeur de l'information
- Arbre de décision
- Fonction utilité

Décision en univers aléatoire

Et si on parle d'une variable aléatoire au lieu de situations ...

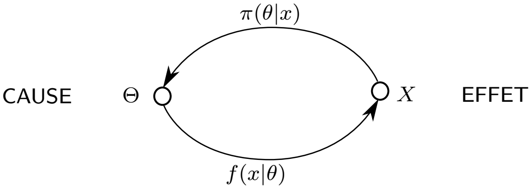
Θ	variable aléatoire qui représente le paramètre du système
θ	valeur prise de Θ, parmi l'ensemble de valeurs possibles Q
a	décision ou action prise, parmi l'ensemble des actions possibles A
$c(\theta, a)$	perte (ou coût) occasionné par l'action a quand Θ prend la valeur θ
$\pi(\theta)$	densité (ou loi) de probabilité *a priori* de la variable aléatoire Θ

Espérance de perte - densité de probabilité *a priori* $\pi(\theta)$

$$\mathrm{E}c(\pi(\cdot), a) = \int_Q c(\theta, a)\, \pi(\theta)\, d\theta$$

Décision en univers aléatoire : l'approche Bayésienne

Afin d'obtenir plus d'information sur le paramètre du système Θ, on peut faire appel à une autre variable aléatoire, X, définie sur Ξ. En général, l'observation x de X ne permet pas de déterminer avec certitude la valeur θ de Θ.



$\pi(\theta|x)$ est la densité de probabilité *a posteriori* de Θ conditionnée sur X
$f(x|\theta)$ est la densité de probabilité *a posteriori* de X conditionnée sur Θ

Espérance de perte - densité de probabilité $\pi(\theta|x)$ estimée par des statistiques

$$\mathrm{Ec}(\pi(\cdot|x), a) = \int_Q c(\theta, a)\, \pi(\theta|x)\, d\theta$$

Théorème de Bayes

$$\pi(\theta|x)\, f(x) = f(x|\theta)\, \pi(\theta), \quad \text{avec } f(x) = \int_Q f(x|\theta')\, \pi(\theta')\, d\theta'$$

Règle de décision (non randomisée)

Règle de décision (non randomisée)

Une règle de décision $\delta(\cdot) : \Xi \to A$ donne la décision à prendre $\delta(x) \in A$ à chaque fois que la valeur observée de X est x.

Fonction risque (d'une règle non randomisée)

$$R(\theta, \delta) = \int_{\Xi} c(\theta, \delta(x))\, f(x|\theta)\, dx$$

avec $f(x|\theta)\, dx = \Pr(x < X \leq x + dx \mid \theta)$

Exemple : *Trader* en bourse

- Un joueur en bourse observe le cours d'une valeur, X. Il a trois possibilités pour chaque observation x de X :
  - (a_1) acheter
  - (a_2) ne rien faire
  - (a_3) vendre
- Une règle possible est

$$\delta(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x \leq 200 \\ a_2 & \text{si } 200 < x \leq 250 \\ a_3 & \text{si } x > 250 \end{cases}$$

Exemple : Lancement d'un nouveau produit

- Une entreprise veut lancer un nouveau produit sur le marché.
- Elle doit viser un pourcentage de la population ($A = [0\,,1]$), sans connaissance de manière précise le pourcentage de la population susceptible d'être intéressée (Θ).

  La fonction coût est

$$c(\theta, a) = \begin{cases} \theta - a & \text{si } \theta \geq a \\ 2(a - \theta) & \text{sinon} \end{cases}$$

  Loi de probabilité *a priori* de Θ a la forme d'une loi uniforme, avec

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 10 & \text{si } \theta \in [0.1; 0.2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- L'entreprise lance alors une enquête auprès de n personnes *représentatives* et observe le nombre de personnes intéressées (X). On a $f(x|\theta) = C_n^x\, \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$.
- La règle de décision $\delta(x) = x/n$ signifie que si x personnes parmi les n interrogées ont manifesté leur intérêt, on vise une proportion de population égale à x/n.
- La fonction risque de la règle $\delta(x) = x/n$ est donnée par

$$R(\theta, \delta) = \sum_{x=0}^{n} c(\theta, x/n)\; C_n^x\, \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

Règle de décision randomisée

Règle de décision randomisée

Une règle de décision randomisée $\delta^*(x, \cdot)$ est, pour une observation $x \in \Xi$, la probabilité associée à chaque action. $\delta^*(x, a)$ est alors la probabilité de prendre l'action $a \in A$ à chaque fois que la valeur observée de X est x.

Fonction perte (ou coût) d'une règle randomisée

$$C(\theta, \delta^*(x, \cdot)) = \sum_{a \in A} c(\theta, a)\, \delta^*(x, a)$$

Fonction risque d'une règle randomisée

$$R(\theta, \delta^*) = \int_{\Xi} C(\theta, \delta^*(x, \cdot))\, f(x|\theta)\, dx$$

Exemple : *Trader* en bourse (suite)

- Le trader utilise la règle $\delta^*(200, a_1) = 0.2, \delta^*(200, a_2) = 0.5, \delta^*(200, a_3) = 0.3$. Donc, à chaque fois que le cours de la valeur est à 200 €, sa décision dépend de la position de l'aiguille des secondes sur sa montre : entre 0 et 12, il achète ; entre 12 et 42, il ne rien faire ; et entre 42 et 60, il vendre.
- La règle, $\delta^*(a_1) = 0.2, \delta^*(a_2) = 0.5, \delta^*(a_3) = 0.3$, est indépendante du cours. Dans ce cas, la règle de décision randomisée est un vecteur de probabilité.

Principes décisionnels

Le principe Bayésien conditionnel

Le principe Bayesien conditionnel consiste à choisir une action $a \in A$ qui minimise l'espérance de perte de Bayes :

$$\min_a \mathrm{E}C(\pi, a)$$

Une telle action est appelée action Bayésienne.

Risque Bayésien d'une règle de décision (randomisée ou non)

$$r(\pi, \delta) = \mathrm{E}R(\theta, \delta) = \int_Q R(\theta, \delta)\, \pi(\theta)\, d\theta$$

Le principe de risque Bayésien

On choisit la décision qui conduit au plus faible risque Bayésien

$$\min_\delta r(\pi, \delta)$$

Une telle règle, δ_π, est appelée règle Bayésienne.
La quantité $r(\pi) = r(\pi, \delta_\pi)$ est le risque Bayésien pour une densité de probabilité π.

Principes décisionnels

Principe minimax

On choisit la décision qui conduit au plus faible risque Bayésien dans le pire des cas

$$\min_{\delta} \max_{\theta} R(\delta, \delta)$$

La valeur ci-dessus est appelée valeur minimax.

Une règle de décision δ_1 est meilleure qu'une autre règle de décision δ_2 au sens de la fonction risque si $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$, pour tout $\theta \in Q$, avec inégalité stricte pour au moins une valeur de θ.

Admissibilité

Une règle de décision est dite *admissible* s'il n'existe aucune meilleure règle au sens de la fonction risque. Sinon, elle est *inadmissible*.

Remarque :
Une règle de décision est admissible s'il existe au moins une valeur θ de Θ telle que cette règle conduit à une plus petite valeur de la fonction risque qu'au moins une autre règle.

Décision en univers aléatoire : l'approche Bayésienne

Exemple (Exemple récapitulatif)

- *Considérons un jeu avec une pièce de monnaie et un dé spécial sur lequel quatre côtés sont marqués face et deux pile.*
- *En couvrant par chaque main un des objets, je demande au joueur de deviner lequel est sous la main droite.*
- *Si la réponse est juste, le joueur gagne 10 €, sinon il ne gagne rien.*

- *Indice : j'annonce la marque du côté supérieur (pile ou face) de l'objet sous la main gauche. Le joueur peut deviner avec plus de précision l'autre objet.*

Question : le prix à payer

Question soulevée à la séance précédante :
Combien est-on prêt à payer pour avoir une information supplémentaire ?

Exemple :

	θ_1	θ_2	θ_j
	0.5	0.5	p_j
a_1	10	0	
a_2	8	4	
a_3	5	6	

Valeur espérée (critère de l'espérance mathématique du gain)

$$\mathrm{E} = \max_i \sum_j p_j u(a_i, \theta_j)$$

Le prix du contrôle

Et si on pouvait *contrôler* l'occurrence des situations ?

La (fonction) valeur avec contrôle, pour un prix de contrôle y

$$\text{VC}(y) = \max_i \max_j u(a_i, \theta_j) - y$$

Remarque : le contrôle est avantageux quand $\mathrm{E} < \text{VC}(y)$

Valeur de contrôle (ou prix maximum)

$$\begin{aligned} \text{VC} &= \text{VC}(0) - \mathrm{E} \\ &= \max_i \max_j u(a_i, \theta_j) - \max_i \sum_j p_j u(a_i, \theta_j) \end{aligned}$$

Information parfaite

Et si on connaissait la situation avant le choix de l'action ?

La (fonction) valeur espérée avec information parfaite, pour un prix y

$$\text{VEIP}(y) = \sum_j p_j \big(\max_i u(a_i, \theta_j) \big) - y$$

Remarque : la connaissance (avec certitude) est avantageuse quand $\mathrm{E} < \text{VEIP}(y)$

La valeur espérée de l'information parfaite (ou prix maximum)

$$\begin{aligned} \text{VEIP} &= \text{VEIP}(0) - \mathrm{E} \\ &= \sum_j p_j \big(\max_i u(a_i, \theta_j) \big) - \max_i \sum_j p_j u(a_i, \theta_j) \end{aligned}$$

Remarque : La valeur de l'information correspond à sa capacité à conduire un changement dans la décision. Elle est de valeur nulle si aucune information ne permet de remettre en cause le choix *a priori*.

Exemples : ...

Information imparfaite

La (fonction) valeur espérée avec information imparfaite, pour un prix y

$$\text{VEII}(y) = \sum_{x \in \Xi} \pi(x) \max_i \left(\sum_j \pi(\theta_j | x)\, u(a_i, \theta_j) \right) - y$$

Remarque : le connaissance est avantageuse quand $\mathrm{E} < \text{VEII}(x)$

La valeur espérée de l'information imparfaite (ou prix maximum)

$$\text{VEII} = \text{VEII}(0) - \mathrm{E}$$

Remarque :

$$0 \leq \text{VEII} \leq \text{VEIP} \leq \text{VC}$$

Information imparfaite : n échantillons

Information imparfaite : n échantillons

- $\mathrm{VEII}(n)$: valeur de l'espérance des informations imparfaites à n échantillons
- y : coût de réaliser un échantillon
- $\mathrm{VEII}(n) - y\,n$: espérance du gain net dû aux n échantillons

Exemple récapitulatif (suite) :

- Si on propose de jeter l'objet de la main gauche deux fois au lieu d'une, et on propose d'annoncer la séquence des apparitions.

Vraisemblance

Vraisemblance

Deux annonces sont équivalentes si le ratio de leurs vraisemblances est le même pour toutes les hypothèses.

Exemple récapitulatif (suite) :

- Considérons les deux annonces suivantes :
  - Une face parmi deux observations ;
  - Une série d'observations est continuée jusqu'à l'apparition d'une pile, qui s'est produite à la deuxième observation.

Arbre de décision : Exemple introductif

Exemple (Exemple introductif)

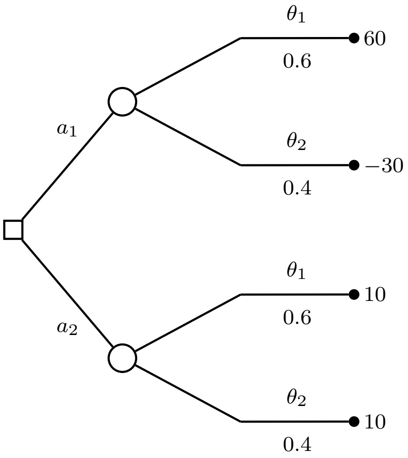
- *Une entreprise fabrique un produit, sur une chaîne de montage.*
- *Bien réglée, la chaîne produit seulement 10% d'articles défectueux, entraînant un gain de 60 k€ par jour.*
- *La chaîne est parfois déréglée, résultant en 40% de produits défectueux, avec une perte de 30 k€.*
- *Afin de s'assurer du bon fonctionnement de la chaîne de montage pendant toute la journée, elle doit être réglée par les techniciens pendant la nuit. Le coût d'une telle intervention est de 50 k€.*
- *Le responsable du service entretien estime à 0.6 la probabilité que la chaîne soit bien réglée.*
- *Est-il rentable de faire ce réglage ?*

Deux formes : normale et extensive

Forme normale

	θ_1	θ_2
	0.6	0.4
a_1	60	-30
a_2	10	10

Forme extensive



Algorithme de l'espérance mathématique

Objectif : Associer à chaque nœud la valeur espérée, à partir des feuilles et jusqu'à la racine.

◯ A un nœud d'événement, on lui associe la valeur de l'espérance mathématique, soit

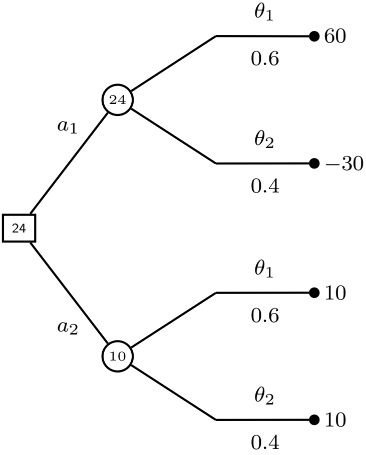
$$\sum_i p_i c_i$$

où p_i est la probabilité associée à l'arc reliant le nœud avec son $i^{\text{ème}}$ successeur, et c_i la valeur associée à ce dernier.

☐ A un nœud de décision, on lui associe la valeur donnée par

$$\min_i c_i \qquad \text{ou bien} \qquad \max_i u_i$$

pour tous les i successeurs du nœud.



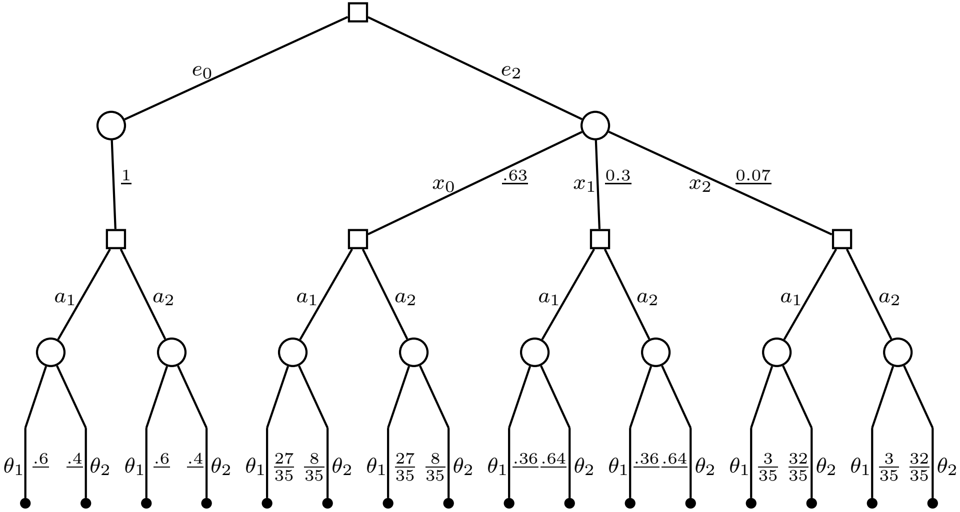
Décisions séquentielles

Exemple (Exemple introductif : information supplémentaire)

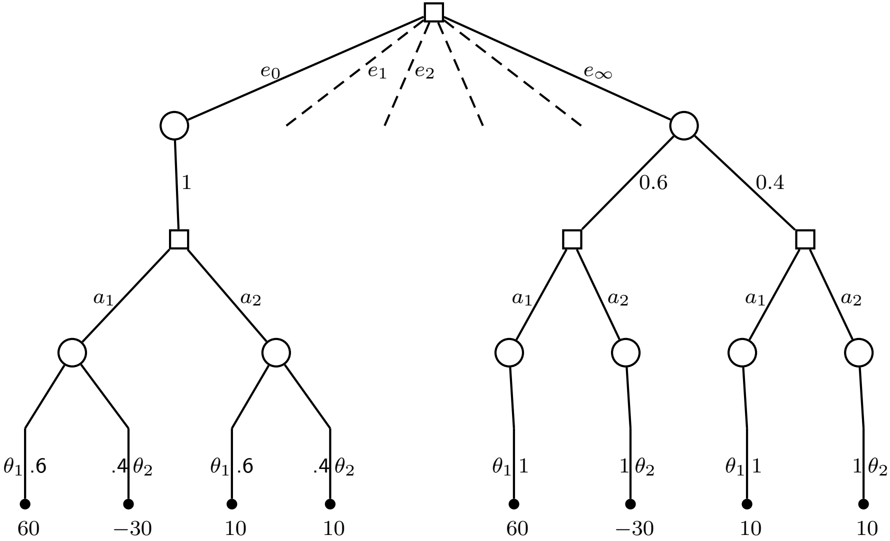
- *Une entreprise fabrique un produit, sur une chaîne de montage.*
- *Bien réglée, la chaîne produit seulement 10% d'articles défectueux, entraînant un gain de 60 k€ par jour.*
- *La chaîne est parfois déréglée, résultant en 40% de produits défectueux, avec une perte de 30 k€.*
- *Afin de s'assurer du bon fonctionnement de la chaîne de montage pendant toute la journée, elle doit être réglée par les techniciens pendant la nuit. Le coût d'une telle intervention est de 50 k€.*
- *Le responsable du service entretien estime à 0.6 la probabilité que la chaîne soit bien réglée.*

- *Pour être renseigné sur l'état de la chaîne de montage, il est possible de contrôler deux articles produits à la fin de la journée antérieure. Un tel test coûterait 2 k€.*
- *Un tel test est-il opportun ? et faut-il régler la chaîne ?*

Exemple introductif : L'arbre



Valeur de l'information



Limite de l'approche : le paradoxe de Saint Pétersbourg

Exemple :
Un casino propose le jeu suivant : Le joueur doit miser un euro au début, chaque fois que le joueur décide de continuer, une pièce est jetée. Si c'est une pile, le joueur perd sa mise et le jeu se termine. Si c'est une face, le joueur reçoit trois fois sa mise. Dans ce cas, le joueur a le choix entre *continuer* et *s'arrêter*. S'il continue, il faut qu'il mise tout ce qu'il a reçu.

Le paradoxe :
Selon l'algorithme de l'espérance mathématique, il faut continuer à jouer tant que *pile* n'apparaît pas. La probabilité d'avoir *pile* tend vers 1.
Or, on va perdre avec certitude si on adopte cette stratégie.

Explication :
C'est un processus de décision avec un nombre indéterminé d'étapes auquel ne s'applique pas forcement cette approche.

Solution :
Il faut introduire un mécanisme qui tient compte du risque que l'on court si on continue à jouer : la fonction utilité.

Limite des approches précédentes

Exemple 1 : Le paradoxe de Saint Pétersbourg

On lance une pièce de monnaie tant que face se réalise. Dès que pile se réalise à la $i^{\text{ème}}$ fois, le gain est de 2^i €.

- Espérance mathématique de gain
- Espérance mathématique du logarithme du gain

Exemple 2 : L'ensemble des notes possibles en SY05 : $\{A, B, C, D, E\}$

- Critère non mesurable en terme monétaire
- L'effet relatif

Solution : La fonction d'utilité

Préférences

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble fini de récompenses.

Définition (Préférences)

On définit sur $\mathcal{R}$ une relation de préférence, désignée par $\prec$

- $r_1 \prec r_2$: je préfère r_2 à r_1.
- $r_1 \nprec r_2$: r_2 n'est pas préférée à r_1
- $r_1 \approx r_2$: je suis indifférent entre r_1 et r_2

Exemple :
Actions : il pleut, il ne pleut pas.
Evénements : aller au match de foot, aller au cinéma.

Axiomes de rationalité

- **Complétude :** Pour tout $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$, on a soit $r_1 \prec r_2$, soit $r_1 \approx r_2$, soit $r_2 \prec r_1$.
- **Transitivité :** Pour tout $r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{R}$, si $r_1 \prec r_2$ et $r_2 \prec r_3$, alors $r_1 \prec r_3$.

Une relation de préférence est rationnelle si elle est complète et transitive.

Représentation ordinale : fonction d'utilité

Définition (Fonction d'utilité)

La fonction $u : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction d'utilité,
si et seulement si $r_1 \prec_u r_2$ et $u(r_1) < u(r_2)$ sont équivalentes.

Remarques :

- Soit $u : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\prec_u$ est une relation de préférence rationnelle.
- Si $\mathcal{R}$ est fini ou dénombrable et $\prec$ une relation de préférence rationnelle, alors il existe une fonction d'utilité u telle que $\prec_u$ coïncide avec $\prec$.
- Pour deux fonctions d'utilité u et v, on dit $\prec_u$ coïncide avec $\prec_v$ si et seulement si il existe une fonction f strictement croissante telle que $v(\cdot) = f(u(\cdot))$.

Préférences sur les distributions de probabilité

Soit l'ensemble des lois de probabilités

$$\mathcal{P} = \left\{ (p_1, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^{n} p_k = 1 \right\}$$

Cet ensemble joue le rôle de $\mathcal{R}$.

Soit $\prec$ une relation de préférence sur $\mathcal{P}$:

Les axiomes de von-Neumann et Morgenstern

- **Rationalité :** $\prec$ est une relation de préférence rationnelle.
- **Indépendance :** Pour tout $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$, et $\lambda \in]0, 1[$, $P_1 \prec P_2$ implique $\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_3 \prec \lambda P_2 + (1 - \lambda) P_3$.
- **Continuité :** Pour tout $P_1 \prec P_2 \prec P_3$, il existe $\epsilon \in]0, 1[$ tel que $(1 - \epsilon) P_1 + \epsilon P_3 \prec P_2 \prec \epsilon P_1 + (1 - \epsilon) P_3$.

Utilité espérée

Soit $u(r)$ l'utilité de la récompense $r \in \mathcal{R}$ pour un joueur. Il peut donc associer à tout $P \in \mathcal{P}$, la valeur utilité espérée $U(P)$

Utilité espérée

C'est l'espérance de la variable aléatoire $u(\cdot)$ sous la probabilité $P(\cdot)$, soit

$$U(P) = \sum_{r \in \mathcal{R}} P(r)\, u(r).$$

$\prec_U$ satisfait les axiomes de rationalité, d'indépendance et de continuité.

théorème (von Neumann et Morgenstern)

Pour une relation de préférence $\prec$, il existe une fonction d'utilité $u : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\prec$ coïncide avec $\prec_U$ si et seulement si $\prec$ vérifie les axiomes de vNM.

Exemples

Exemple (Exemple 1 : Jeux de loterie)

- *Jeu avec trois lots à gagner : porte-clés* (r_1), *chaine hifi* (r_2), *voyage* (r_3)
- *La fonction d'utilité est définie par* $u(r_1) = 0$, $u(r_2) = 0.98$, *et* $u(r_3) = 1$
- *Deux tirages exclusifs sont possibles, avec les probabilités suivantes :*

$$a_1 \;:\; (0.6, 0.2, 0.2)$$
$$a_2 \;:\; (0.5, 0.5, 0)$$

- *A quel tirage est-il préférable de participer ?*

Exemple (Exemple 2 : Notes possibles en SY05)